¿Cuándo estar satisfecho con el presente

y dejar de buscar en el futura algo posiblemente mejor?

J.Correa [1], R. Saona[1], B. Ziliotto [2]

[1]Universidad de Chile

[2]CEREMADE, CNRS, Université Paris Dauphine, PSL University, Paris, France

Comprando un pasaje de avión

Consejos básicos:

1. Buscar pasajes sólo en modo incógnito
2. Ser flexible con las fechas
3. Borrar el historial antes de realizar la búsqueda
4. ...

Algunos hechos:

1. Lexis-Nexis, una compañía proveedora de datos en línea, vende a precios distintos para cada uno de sus usuarios.
2. Orbitz, una agencia de viajes en línea, descubrió que la gente que usa computadores Mac gastan hasta un 30% más en hoteles.

Dinámica propuesta

A una jugadora se le presenta una serie de números,
que son revelados uno a uno.
Ella debe elegir sólo uno
y puede escogerlo sólo en el momento en que fue revelado.

Dinámica propuesta

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones

Dinámica propuesta

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ

Dinámica propuesta

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te muestran $(V_{\sigma_1(\omega)}(\omega), \sigma_1(\omega))$ y , con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$ ¿lo tomas o lo dejas?

Dinámica propuesta

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te muestran $(V_{\sigma_1(\omega)}(\omega), \sigma_1(\omega))$ y , con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$ ¿lo tomas o lo dejas?
    2. Te muestran $(V_{\sigma_2(\omega)}(\omega), \sigma_2(\omega))$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$ ¿lo tomas o lo dejas?

Dinámica propuesta

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te muestran $(V_{\sigma_1(\omega)}(\omega), \sigma_1(\omega))$ y , con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$ ¿lo tomas o lo dejas?
    2. Te muestran $(V_{\sigma_2(\omega)}(\omega), \sigma_2(\omega))$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$ ¿lo tomas o lo dejas?
    3. ...

Dinámica propuesta

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te muestran $(V_{\sigma_1(\omega)}(\omega), \sigma_1(\omega))$ y , con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$ ¿lo tomas o lo dejas?
    2. Te muestran $(V_{\sigma_2(\omega)}(\omega), \sigma_2(\omega))$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$ ¿lo tomas o lo dejas?
    3. ...
3. Tu objetivo es maximizar la esperanza del elemento (aleatorio) que tomas, donde $V_1, \ldots, V_n$ son independientes y positivas.

Dinámica alternativa: Vender un ítem

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones

Dinámica alternativa: Vender un ítem

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ

Dinámica alternativa: Vender un ítem

1. Te dan a conocer $F_1, \dots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te enfrentas con el comprador $\sigma_1(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_1}(\omega)$, con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_1}. ¿qué precio le ofreces?

Dinámica alternativa: Vender un ítem

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te enfrentas con el comprador $\sigma_1(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_1}(\omega)$, con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_1}.
    ¿qué precio le ofreces?
    2. Si te rechaaron, te enfrentas con el comprador $\sigma_2(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_2}(\omega)$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_2}.
    ¿qué precio le ofreces?

Dinámica alternativa: Vender un ítem

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te enfrentas con el comprador $\sigma_1(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_1}(\omega)$, con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_1}.
       ¿qué precio le ofreces?
    2. Si te rechaaron, te enfrentas con el comprador $\sigma_2(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_2}(\omega)$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_2}.
       ¿qué precio le ofreces?
    3. ...

Dinámica alternativa: Vender un ítem

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te enfrentas con el comprador $\sigma_1(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_1}(\omega)$, con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_1}.
    ¿qué precio le ofreces?
    2. Si te rechaaron, te enfrentas con el comprador $\sigma_2(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_2}(\omega)$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_2}.
    ¿qué precio le ofreces?
    3. ...
3. Tu objetivo es maximizar la esperanza de la venta.

Dinámica propuesta, ¿a qué me comparo?

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
   1. Te muestran $(V_{\sigma_1(\omega)}(\omega), \sigma_1(\omega))$ y , con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$ ¿lo tomas o lo dejas?
   2. Te muestran $(V_{\sigma_2(\omega)}(\omega), \sigma_2(\omega))$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$ ¿lo tomas o lo dejas?
   3. ...
3. Tu objetivo es maximizar la esperanza del elemento (aleatorio) que tomas, donde $V_1, \ldots, V_n$ son independientes y positivas.

Dinámica propuesta, ¿a qué me comparo?

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
   1. Te muestran $(V_{\sigma_1(\omega)}(\omega), \sigma_1(\omega))$ y , con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$ ¿lo tomas o lo dejas?
   2. Te muestran $(V_{\sigma_2(\omega)}(\omega), \sigma_2(\omega))$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$ ¿lo tomas o lo dejas?
   3. ...
3. Tu objetivo es maximizar la esperanza del elemento (aleatorio) que tomas, donde $V_1, \ldots, V_n$ son independientes y positivas.
4. ¿Y qué si pudiera comparar todas las ofertas antes de elegir?

Dinámica alternativa: Vender un ítem

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
    1. Te enfrentas con el comprador $\sigma_1(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_1}(\omega)$, con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_1}.
    ¿qué precio le ofreces?
    2. Si te rechaaron, te enfrentas con el comprador $\sigma_2(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_2}(\omega)$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_2}.
    ¿qué precio le ofreces?
    3. ...
3. Tu objetivo es maximizar la esperanza de la venta.

Dinámica alternativa: Vender un ítem

1. Te dan a conocer $F_1, \ldots, F_n$ distribuciones
2. Considera un orden aleatorio de n elementos, σ
   1. Te enfrentas con el comprador $\sigma_1(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_1}(\omega)$, con $V_{\sigma_1} \sim F_{\sigma_1}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_1}.
      ¿qué precio le ofreces?
   2. Si te rechaaron, te enfrentas con el comprador $\sigma_2(\omega)$ con valoración privada $V_{\sigma_2}(\omega)$, con $V_{\sigma_2} \sim F_{\sigma_2}$. Pero dice que lo valora en b_{σ_2}.
      ¿qué precio le ofreces?
   3. ...
3. Tu objetivo es maximizar la esperanza de la venta.
4. ¿Y qué si pudiera decidir con todos al mismo tiempo?

Mecanismos de remate

1 objeto, n compradores.
Comprador i tiene una valoración $v_i \in V$,
pero dice que lo valora en b_i.
Un mecanismo (q, p) consiste en:
$q : B_1 \times \ldots \times B_n \to \Delta_0([n])$, decidir quién se lleva el objeto.
$p : B_1 \times \ldots \times B_n \to \mathbb{R}^n$, los pagos de todos los participantes.

Mecanismo óptimo

Asumiendo que $v_i \sim F_i$, el mecanismo que optimiza la ganancia del vendedor corresponde a la solución del siguiente problema.

$$(P)\begin{cases} \max_q & \int_{V^n} q_i(v)\left(v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}\right) f(v)dv \\ s.t. & q(v) \in \Delta_0([n]) \\ & \mathbb{E}_{v_{-i}}\left[q_i(\cdot, v_{-i})\right] \textit{ nodecreciente}. \end{cases}$$

Con esto, los compradores no miente y están dispuestos a participar.

¿Son los mismos problemas?

Tengo un ALG de precios secuenciales tal que

$$\frac{\mathbb{E}(\text{ALG})}{\mathbb{E}(\text{Myerson})} \geq c$$

SSI

Tengo un $\overline{ALG}$ de aceptación secuencial tal que

$$\frac{\mathbb{E}(\overline{ALG})}{\mathbb{E}(\max)} \geq c$$

¿Cuál es la mejor garantía?

1. Aún no se sabe.

¿Cuál es la mejor garantía?

1. Aún no se sabe.
2. Hasta Octubre 2017,
   la mejor estrategia era: una exigencia fija en el tiempo,
   calculada al inicio del proceso
   ($c = 1 - 1/e \approx 0.63$).

¿Cuál es la mejor garantía?

1. Aún no se sabe.
2. Hasta Octubre 2017,
   la mejor estrategia era: una exigencia fija en el tiempo, calculada al inicio del proceso
   ($c = 1 - 1/e \approx 0.63$).
3. Hoy,
   el mejor resultado considera bajar las exigencias en el tiempo,
   ($c \approx 0.669$).

Esquema de demostración

1. Fijemos la instancia $F_1, \ldots, F_n$ y considera una exigencia fija τ tal que
$$\mathbb{P}(\max \leq \tau) = p\,.$$

Esquema de demostración

1. Fijemos la instancia $F_1, \ldots, F_n$ y considera una exigencia fija τ tal que
$$\mathbb{P}(\max \leq \tau) = p\,.$$
2. Demostraremos que para todo $t \geq 0$
$$\mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)\,.$$

Esquema de demostración

1. Fijemos la instancia $F_1, \ldots, F_n$ y considera una exigencia fija τ tal que
$$\mathbb{P}(\max \leq \tau) = p\,.$$
2. Demostraremos que para todo $t \geq 0$
$$\mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)\,.$$
3. Intregrando, por ser variables positivas,
$$\mathbb{E}(ALG) \geq c_p \mathbb{E}(\max)\,.$$

Esquema de demostración

1. Fijemos la instancia $F_1, \ldots, F_n$ y considera una exigencia fija τ tal que
$$\mathbb{P}(\max \leq \tau) = p\,.$$
2. Demostraremos que para todo $t \geq 0$
$$\mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)\,.$$
3. Intregrando, por ser variables positivas,
$$\mathbb{E}(ALG) \geq c_p \mathbb{E}(\max)\,.$$
4. Elegiremos p^* que maximiza c_p, obteniendo $c_{p^*} = 1 - 1/e \approx 0.63$.

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

1. Si $t \leq \tau$, nuestra exigencia,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(ALG > t) &= \mathbb{P}(ALG > 0) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtener algo}) \\ &= \mathbb{P}(\text{exista algo que obtener}) \\ &= \mathbb{P}(\max > \tau) \\ &\geq (1-p)\, \mathbb{P}(\max > t)\,. \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

1. Si $t \leq \tau$, nuestra exigencia,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(ALG > t) &= \mathbb{P}(ALG > 0) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtener algo}) \\ &= \mathbb{P}(\text{exista algo que obtener}) \\ &= \mathbb{P}(\max > \tau) \\ &\geq (1 - p)\,\mathbb{P}(\max > t)\,. \end{aligned}$$

2. Por lo que, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq (1 - p)\,\mathbb{P}(\max > t)$.

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

1. Si $t \leq \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq (1-p)\,\mathbb{P}(\max > t)$.

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

1. Si $t \leq \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq (1-p)\,\mathbb{P}(\max > t)$.
2. Si $t > \tau$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(ALG > t) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(V_i > t | \text{tomé } V_i)\mathbb{P}(\text{tomar } V_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(V_i > t)}{\mathbb{P}(V_i > \tau)} \mathbb{P}(\text{tomar } V_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(V_i > t)\mathbb{P}(\text{tomar } V_i | V_i > \tau) \\
&\geq \left(\frac{1-p}{-\ln p} \right) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(V_i > t) \\
&\geq \left(\frac{1-p}{-\ln p} \right) \mathbb{P}(\max > t)\,.
\end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

1. Si $t \leq \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq (1-p)\,\mathbb{P}(\max > t)$.

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

1. Si $t \leq \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq (1 - p)\, \mathbb{P}(\max > t)$.
2. Si $t > \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq \left(\frac{1-p}{-\ln p}\right) \mathbb{P}(\max > t)$.

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

1. Si $t \leq \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq (1-p)\,\mathbb{P}(\max > t)$.
2. Si $t > \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq \left(\frac{1-p}{-\ln p}\right) \mathbb{P}(\max > t)$.
3. Definimos $c_p := \min\{1-p, \left(\frac{1-p}{-\ln p}\right)\}$ e integrando,

$$\mathbb{E}(ALG) \geq c_p \mathbb{E}(\max)\,.$$

$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(ALG > t) \geq c_p \mathbb{P}(\max > t)$

1. Si $t \leq \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq (1-p)\,\mathbb{P}(\max > t)$.
2. Si $t > \tau$, $\mathbb{P}(ALG > t) \geq \left(\frac{1-p}{-\ln p}\right) \mathbb{P}(\max > t)$.
3. Definimos $c_p := \min\{1-p, \left(\frac{1-p}{-\ln p}\right)\}$ e integrando,
$$\mathbb{E}(ALG) \geq c_p \mathbb{E}(\max)\,.$$
4. Maximizando en p, obtenemos $p^* = 1/e$ y $c_p = 1 - 1/e$.

¿Preguntas?

Referencias

- J. Correa, R. Saona, B. Ziliotto, *Prophet Secretary Through Blind Strategies*, SODA 2019, to appear.
- Y. Azar, A. Chiplunkar, H. Kaplan, *Prophet Secretary: Surpassing the 1-1/e Barrier*, EC 2018.
- U. Krengel, L. Sucheston, *On semiamarts, amarts and processes with finite value*, Adv. in Probability, 4 (1978), pp. 197-266.